



TITLE:

# Von Neumann 代数の predual における閉ユニタリー軌道の空間(作用素環の解析性についての研究)

AUTHOR(S):

日合, 文雄

---

CITATION:

日合, 文雄. Von Neumann 代数の predual における閉ユニタリー軌道の空間(作用素環の解析性についての研究). 数理解析研究所講究録 1988, 674: 105-126

ISSUE DATE:

1988-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100913>

RIGHT:

# Von Neumann 代数の predual における閉 ユニタリー軌道の空間

北大応電研 日合文雄 (Fumio Hiai)

## §1. 序論

$M$  は von Neumann 代数,  $M_*$  は  $M$  の predual,  $M_*^+$  は  $M_*$  の positive cone (i.e.  $M_*^+$  は  $M$  上の正の正規線形汎関数の全体) とする. さらに,  $\mathcal{S}(M) (\subset M_*^+)$  は  $M$  上の正規 states の全体とする.  $\mathcal{U}$  は  $M$  に属する ユニタリー全体とする.  $\varphi \in M_*^+$  の ユニタリー軌道  $\{u\varphi u^* = \varphi(u^* \cdot u) : u \in \mathcal{U}\}$  のノルム閉包を  $[\varphi]$  で表すと,  $M_*^+$  に次の同値関係が入る:  $\varphi \sim \psi \stackrel{\text{def}}{\iff} \varphi \in [\psi]$ . このとき, 商空間  $M_*^+ / \sim$  は距離

$$\begin{aligned} d([\varphi], [\psi]) &= \inf \{ \|\varphi' - \psi'\| : \varphi' \in [\varphi], \psi' \in [\psi] \} \\ &= \inf_{u \in \mathcal{U}} \|\varphi - u\psi u^*\| \end{aligned}$$

により距離空間となる. この距離空間  $M_*^+ / \sim$  の完備性は容易にわかる.

最近, Haagerup-Størmer [5] が  $M_*^+ / \sim$  の isometric chara-

cterizationを与えたので、次節以下でそれを紹介しよう。さらに筆者と中村美浩氏が最近得た関連結果[6, 7]も報告する。

以下この節では、 $M_*^+/\sim$ に関してこれまで知られていた結果をいくつか挙げておこう。

(1°)  $M$ が $I_n$ 型 factor, i.e.  $M = \mathbb{M}_n$  ( $n \times n$  行列全体) の場合,  $\varphi \in M_*^+$  は  $0 \leq h_\varphi \in \mathbb{M}_n$  により  $\varphi(x) = \text{tr}(h_\varphi x)$  と書けて,

$$d([\varphi], [\psi]) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \|h_\varphi - u h_\psi u^*\|_1.$$

ただし  $\|\cdot\|_p$  は Schatten  $p$ -ノルムとする。行列については、次の結果がよく知られている: Hermite 行列  $h, k \in \mathbb{M}_n$  の固有値をそれぞれ  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n, \beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$  とするとき,

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \|h - u k u^*\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

ただし  $p = \infty$  では右辺  $= \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i - \beta_i|$ . これは Lidskii-Wielandt の定理の系であり,  $p = \infty$  の場合は H. Weyl (1912) の古典的結果である。

(2°)  $M$ が $III_1$ 型 factor の場合, Connes-Størmer [4] による  $\mathcal{S}(M)$  の homogeneity (i.e.  $\mathcal{S}(M)/\sim$  が一点集合) から次が成立: 任意の  $\varphi, \psi \in M_*^+$  に対して

$$d([\varphi], [\psi]) = |\varphi(1) - \psi(1)|.$$

つまり  $[\varphi] \mapsto \varphi(1)$  は  $M_*^+/\sim$  から  $[0, \infty)$  への isometry. [4] では  $M$  が separable predual を仮定しているが, この仮定は要らない.

(3°)  $M$  が separable predual の  $\text{III}_\lambda$  型 factor ( $0 \leq \lambda < 1$ ) の場合, Bion-Nadal [1] は discrete 分解  $M = N \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$  を用いて,  $\mathcal{S}(M)/\sim$  を flow of weights 上の Borel 確率測度のある集合と対応させた. 特に  $0 < \lambda < 1$  の場合,  $\mathcal{S}(M)/\sim$  が単位円周上の Borel 確率測度の全体と対応することと

$$\text{diam}(\mathcal{S}(M)/\sim) \leq 2(1 - \sqrt{\lambda})$$

を示した. ただし上の左辺は  $\mathcal{S}(M)/\sim$  の直径.

(4°) Connes-Haagerup-Størmer [3] は,  $M$  が  $\sigma$ -finite な  $\text{III}_\lambda$  型 factor ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) のとき,

$$\text{diam}(\mathcal{S}(M)/\sim) = 2 \frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}}$$

を示した. ( $\lambda = 1$  の場合が (2°) で述べた結果 [4].)

## §2. Haagerup-Størmer の主定理

$M$  上の忠実な正規 semifinite weight  $\omega$  を取り,  $M$  のモジュラー自己同型群  $\sigma_t^\omega$  による接合積を  $N = M \rtimes_{\sigma^\omega} \mathbb{R}$  とすると,  $N$  は semifinite であり,  $\tau \circ \theta_\lambda = e^{-\lambda} \tau$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) を満す忠実

な正規トレース  $\tau$  をもつ. ここに,  $\mathcal{N}$  上の自己同型群  $\theta_s$  は  $\sigma_t^\omega$  の dual action.  $\mathcal{N}$  に affiliate する  $\tau$ -可測作用素の全体を  $\tilde{\mathcal{N}}$  で表し,  $\tilde{\mathcal{N}}_+$  は  $\tilde{\mathcal{N}}$  の positive cone とする.  $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$  に対して,  $\mathcal{N}$  上の dual weight  $\tilde{\varphi}$  を取ると, Radon-Nikodym 微分  $h_\varphi = \frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau}$  は  $\tilde{\mathcal{N}}_+$  に属し  $\theta_s(h_\varphi) = e^{-s} h_\varphi$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) を満す. (実際, この対応  $\varphi \mapsto h_\varphi$  を linear extension したものが,  $\mathcal{M}_*$  と Haagerup  $L^1$ -空間  $L^1(\mathcal{M}) = \{a \in \tilde{\mathcal{N}} : \theta_s(a) = e^{-s} a \ (s \in \mathbb{R})\}$  の間の同型対応になる.) そこで, 各  $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$  に対して,  $\mathcal{N}$  に属する射影  $e_\varphi = \chi_{(1, \infty)}(h_\varphi)$  が定まる. ここに,  $\chi_{(\alpha, \beta)}(h_\varphi)$  は  $h_\varphi$  の区間  $(\alpha, \beta)$  に対応するスペクトル射影を表す.  $\theta_s(e_\varphi) = \chi_{(e^s, \infty)}(h_\varphi)$  より

$$\begin{aligned} \tau(e_\varphi) &= \tilde{\varphi}(h_\varphi^{-1} e_\varphi) = \varphi\left(\int_{-\infty}^{\infty} \theta_s(h_\varphi^{-1} e_\varphi) ds\right) \\ &= \varphi\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^s h_\varphi^{-1} \chi_{(e^s, \infty)}(h_\varphi) ds\right) \\ &= \varphi\left(h_\varphi^{-1} \int_0^{\infty} \chi_{(\lambda, \infty)}(h_\varphi) d\lambda\right) \\ &= \varphi(\text{supp } h_\varphi) = \varphi(\text{supp } \varphi) = \varphi(1). \end{aligned}$$

よって  $\hat{\varphi} \in Z(\mathcal{N})_*^+$  (ただし  $Z(\mathcal{N})$  は  $\mathcal{N}$  の center) が

$$\hat{\varphi}(z) = \tau(e_\varphi z), \quad z \in Z(\mathcal{N}),$$

で定義できる. このとき, 任意の  $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_*^+$  に対して,

$$(1) \quad \varphi \leq \psi \Rightarrow \hat{\varphi} \leq \hat{\psi},$$

$$(2) \quad \|\hat{\varphi} - \hat{\psi}\| \leq d([\varphi], [\psi]),$$

$$(3) \quad \hat{\varphi} \cdot \theta_\lambda \geq e^{-\lambda} \hat{\varphi} \quad (\lambda > 0).$$

(1) は容易であり, (2) を示すには  $\varphi \vee \psi = \varphi + (\varphi - \psi)_- = \psi + (\varphi - \psi)_+$  において,

$$\begin{aligned} \|\hat{\varphi} - \hat{\psi}\| &\leq \|(\varphi \vee \psi)^\wedge - \hat{\varphi}\| + \|(\varphi \vee \psi)^\wedge - \hat{\psi}\| \\ &= 2(\varphi \vee \psi)^\wedge(1) - \hat{\varphi}(1) - \hat{\psi}(1) \quad (\text{by (1)}) \\ &= 2(\varphi \vee \psi)(1) - \varphi(1) - \psi(1) \\ &= \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

任意の  $u \in \mathcal{U}$  に対して,  $(u\psi u^*)^\wedge = \hat{\psi}$  より  $\|\hat{\varphi} - \hat{\psi}\| \leq \|\varphi - u\psi u^*\|$  となり, (2) が成立. (3) は  $\theta_\lambda(h_\varphi) = e^{-\lambda} h_\varphi$  より容易.

(2) より  $[\varphi] \in \mathcal{M}_*^+ / \sim \mapsto \hat{\varphi} \in Z(\mathcal{N})_*^+$  が well-defined.

そこで Haagerup-Størmer [5] の主定理は,

定理 (i)  $[\varphi] \mapsto \hat{\varphi}$  は  $\mathcal{M}_*^+ / \sim$  から  $Z(\mathcal{N})_*^+$  への isometry.

(ii)  $\mathcal{M}$  が properly infinite で I 型 direct summand をもたないとき,  $[\varphi] \mapsto \hat{\varphi}$  の値域は

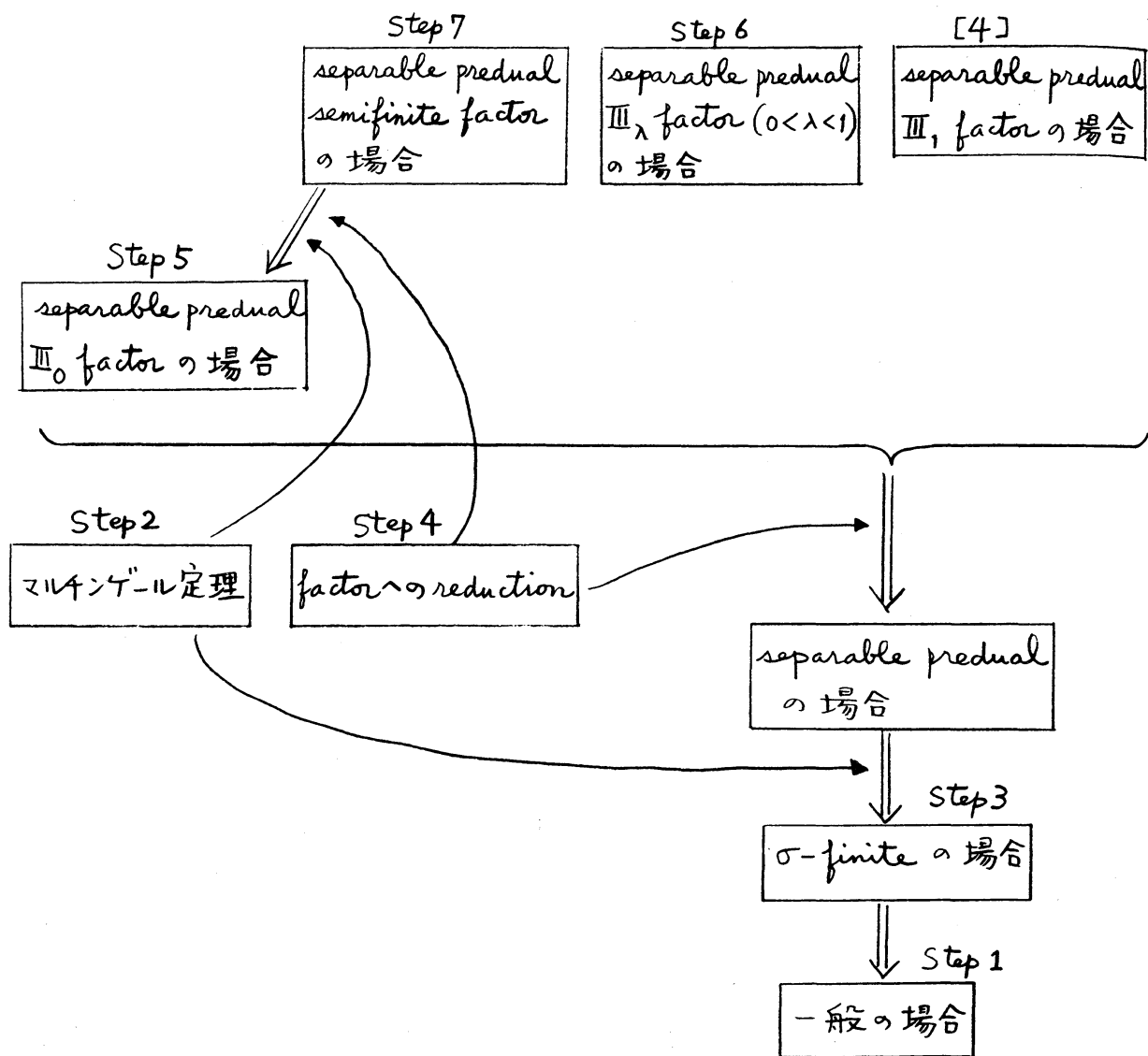
$$P(\mathcal{M})_{\text{def}} = \{\chi \in Z(\mathcal{N})_*^+ : \chi \cdot \theta_\lambda \geq e^{-\lambda} \chi \quad (\lambda > 0)\}.$$

(iii)  $\mathcal{M}$  が II<sub>1</sub> 型のとき,  $[\varphi] \mapsto \hat{\varphi}$  の値域は

$$\{\chi \in P(\mathcal{M}) : \chi \leq \tau|_{Z(\mathcal{N})}\}.$$

### §3. 証明の概略

定理の証明はかなり長いので、その方針を流れ図に書いておくと次のようになる。



対応  $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$  を具体的に計算するのは, separable predual の semifinite factor および  $\text{III}_\lambda$  型 factor ( $0 < \lambda < 1$ ) の場合である.  $\text{III}_1$  型 factor の場合は [4] から成立. separable predual の各 factor で定理が成立すれば, separable predual 一般で成立す

ることは reduction theory を使って証明される.  $\text{III}_0$  型 factor の場合は, 具体的な計算をしないで (直接計算はほとんど不可能か),  $\text{II}_\infty$  型の場合に帰着させて証明する. このために マルチンゲール定理 を用意する.  $\sigma$ -finite の場合は, separable predual の場合に帰着させて証明する. ここでも マルチンゲール定理 が使われる. 最後に, 一般の場合は  $\sigma$ -finite の場合に帰着させる.

証明全体として, semifinite factor および  $\text{III}_\lambda$  factor ( $0 < \lambda < 1$ ) での直接計算を除けば, マルチンゲール定理 が最大のポイントであり, 残りの証明は概ね形式的なものである.

この節で以下, 証明の最後からほぼ逆順に各ステップのスケッチを述べよう.

Step 1 まず, 次の 2 つのことをチェックする:

(1)  $M = \sum_{i \in I}^{\oplus} M_i$  のとき, 各  $M_i$  で定理が成立すれば  $M$  でも成立.

(2)  $M = \mathcal{P} \otimes B(\mathcal{H})$  (ただし  $B(\mathcal{H})$  は Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上の有界作用素全体) のとき,  $\mathcal{P}$  で定理が成立すれば  $M$  でも成立.

一般に, finite な  $M$  は  $\sigma$ -finite か  $\rightarrow$  finite な  $M_i$  の直和  $M = \sum_{i \in I}^{\oplus} M_i$  と書ける. ここで  $M$  が  $\text{II}_1$  型ならば各  $M_i$  は  $\text{II}_1$  型. また properly infinite な  $M$  は  $\sigma$ -finite か  $\rightarrow$  properly infinite



な  $p_i$  で  $M = \sum_{i \in I}^{\oplus} p_i \otimes B(\mathcal{H}_i)$  と書ける. よって (1), (2) から, 一般の場合は  $\sigma$ -finite の場合に帰着する.

Step 2 (マルチンゲール定理)  $M_\alpha \nearrow M$  とし, 各  $\alpha$  に対し conditional expectation  $E_\alpha: M \rightarrow M_\alpha$  が存在して マルチンゲール条件を満たすとき, 各  $M_\alpha$  で定理が成立すれば,

- (1)  $M$  でも定理の (i) が成立,
- (2)  $M$  および各  $M_\alpha$  が properly infinite で I 型 direct summand をもたないとき,  $M$  でも定理の (ii) が成立,
- (3)  $M$  および各  $M_\alpha$  が  $\text{II}_1$  型のとき,  $M$  でも定理の (iii) が成立.

証明は,  $\alpha_0$  を取って  $\alpha \geq \alpha_0$  で考えてよい.  $M_{\alpha_0}$  上の 忠実な正規 semifinite weight  $\omega_0$  を取り  $\omega = \omega_0 \circ E_{\alpha_0}$  とすると (定理の成立は  $\omega$  の取り方に依らないことに注意),  $\alpha \geq \alpha_0$  に対し  $\omega \circ E_\alpha = \omega$  より  $\sigma_t^{\omega_\alpha} = \sigma_t^\omega|_{M_\alpha}$  (ただし  $\omega_\alpha = \omega|_{M_\alpha}$ ). このとき,  $\mathcal{N}_\alpha (= M_\alpha \rtimes_{\sigma^{\omega_\alpha}} \mathbb{R}) \subset \mathcal{N} (= M \rtimes_{\sigma^\omega} \mathbb{R})$  で  $\mathcal{N}_\alpha \nearrow \mathcal{N}$ ,  $\theta_\alpha = \theta|_{\mathcal{N}_\alpha}$ ,  $\tau_\alpha = \tau|_{\mathcal{N}_\alpha}$ . さらに,  $\varphi \in M_*^+$  に対して  $\tilde{\varphi}_\alpha = \tilde{\varphi}|_{\mathcal{N}_\alpha}$  (ただし  $\varphi_\alpha = \varphi|_{M_\alpha}$ ). conditional expectation  $E_\alpha \otimes \text{id}_{B(L^2(\mathbb{R}))}: M \otimes B(L^2(\mathbb{R})) \rightarrow M_\alpha \otimes B(L^2(\mathbb{R}))$  の  $\mathcal{N} (\subset M \otimes B(L^2(\mathbb{R})))$  への制限  $F_\alpha$  は  $\mathcal{N}$  から  $\mathcal{N}_\alpha$  への conditional expectation となり,

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau} = \frac{d(\tilde{\varphi}_\alpha \circ F_\alpha)}{d(\tau_\alpha \circ F_\alpha)} = \frac{d\tilde{\varphi}_\alpha}{d\tau_\alpha}$$

より  $e_\varphi = e_{\varphi_\alpha}$  ( $\alpha \geq \alpha_0$ ). よって  $\varphi, \psi \in M_*^+$  のとき,  $\chi = \tau((e_\varphi - e_\psi) \cdot) \in N_*$  において

$$\begin{aligned} d([\varphi], [\psi]) &\leq d_\alpha([\varphi_\alpha], [\psi_\alpha]) = \|\hat{\varphi}_\alpha - \hat{\psi}_\alpha\| \\ &= \|\chi|_{Z(N_\alpha)}\| \longrightarrow \|\chi|_{Z(N)}\| = \|\hat{\varphi} - \hat{\psi}\| \end{aligned}$$

が示せるので, §2の(2)と合わせて(1)がわかる. (2)は,  $P(M)$  が

$$P_0 = \left\{ \chi \in Z(N)_*^+ : \chi = \int_{-\infty}^0 e^s \rho \cdot \theta_s ds, \rho \in Z(N)_*^+ \right\}$$

のノルム閉包であることを使って示せる. さらに(3)の証明には, center-valuedトレースに対する Dixmier approximation theorem が使われる.

Step 3  $M$  が  $\sigma$ -finite な  $\text{II}_1$  (resp.  $\text{II}_\infty$ ,  $\text{III}$ ) 型 のとき, countably generated な v. N. 部分代数  $M_0 \subset M$  と conditional expectation  $E_0: M \rightarrow M_0$  が存在して,  $M_0 \subset \mathcal{P} \subset M$  で  $E_0 = E_0 E_\mathcal{P}$  となる conditional expectation  $E_\mathcal{P}: M \rightarrow \mathcal{P}$  をもつ v. N. 部分代数  $\mathcal{P}$  がすべて  $\text{II}_1$  (resp.  $\text{II}_\infty$ ,  $\text{III}$ ) 型 であることが証明できる. この証明は,  $\text{II}_1, \text{II}_\infty$  型 の場合は容易であるが,  $\text{III}$  型 の場合は  $\varphi \in \mathcal{S}(M)$  の ユ=タリー軌道 の閉凸包に関する巧妙な議論を用いる. そこで,  $M_0 \subset \mathcal{P} \subset M$  である countably generated v. N. 部分代数  $\mathcal{P}$  に対して  $\bigvee_{t \in \mathbb{R}} \sigma_t^\omega(\mathcal{P}) = \bigvee_{t \in \mathbb{Q}} \sigma_t^\omega(\mathcal{P})$  が  $\sigma^\omega$ -

不変かつ countably generated となるから, countably generated な  $\text{II}_1$  (resp.  $\text{II}_\infty$ ,  $\text{III}$ ) 型の  $M_\alpha \nearrow M$  が存在して Step 2 の仮定を満すことがわかる. よって  $\sigma$ -finite の場合は separable predual の場合に帰着する.

Step 4 (factor への reduction)  $M$  が separable predual のとき, direct integral による factor 分解

$$\{\mathcal{H}, M, \omega\} = \int_{\Gamma}^{\oplus} \{\mathcal{H}(\gamma), M(\gamma), \omega_\gamma\} d\nu(\gamma)$$

を取ると,

$$\mathcal{N} = \int_{\Gamma}^{\oplus} \mathcal{N}(\gamma) d\nu(\gamma) \quad (\text{ただし } \mathcal{N}(\gamma) = M(\gamma) \rtimes_{\sigma, \omega_\gamma} \mathbb{R}),$$

$$Z(\mathcal{N}) = \int_{\Gamma}^{\oplus} Z(\mathcal{N}(\gamma)) d\nu(\gamma),$$

$$\theta_\omega = \int_{\Gamma}^{\oplus} \theta_\omega(\gamma) d\nu(\gamma), \quad \tau = \int_{\Gamma}^{\oplus} \tau_\gamma d\nu(\gamma).$$

各  $\varphi \in M_*^+$  を  $\varphi = \int_{\Gamma}^{\oplus} \varphi_\gamma d\nu(\gamma)$  ( $\varphi_\gamma \in M(\gamma)_*^+$ ) と書くと,  $h_\varphi = \int_{\Gamma}^{\oplus} h_{\varphi_\gamma} d\nu(\gamma)$  (ただし  $h_{\varphi_\gamma} = \frac{d\tilde{\varphi}_\gamma}{d\tau_\gamma}$ ). よって  $e_\varphi = \int_{\Gamma}^{\oplus} e_{\varphi_\gamma} d\nu(\gamma)$  となり  $\hat{\varphi} = \int_{\Gamma}^{\oplus} \hat{\varphi}_\gamma d\nu(\gamma)$ . 従って, 各  $M(\gamma)$  で定理が成立すれば,

$$\begin{aligned} \|\hat{\varphi} - \hat{\psi}\| &= \int_{\Gamma} \|\hat{\varphi}_\gamma - \hat{\psi}_\gamma\| d\nu(\gamma) = \int_{\Gamma} d([\varphi_\gamma], [\psi_\gamma]) d\nu(\gamma) \\ &= d([\varphi], [\psi]) \end{aligned}$$

が示せるので,  $M$  でも定理の (i) が成立.  $M$  が properly infinite

で I 型 direct summand をもたないとき, a.e.  $\gamma$  に対し  $M(\gamma)$  もそうであるから, direct integral の常套的議論により  $M$  でも定理の (ii) が成立するのがわかる. 定理の (iii) も同様.

Step 5  $M$  が separable predual の  $\text{III}_0$  型 factor のとき,  $\text{II}_\infty$  型の  $P$  により  $M = P \rtimes \mathbb{Z}_2^{(\infty)}$  と書ける [2].  $M_n = P \rtimes \mathbb{Z}_2^{(n)}$  とすると,  $M_n \nearrow M$  で マルチンゲール条件を満たす conditional expectation  $E_n: M \rightarrow M_n$  が存在する.  $\mathbb{Z}_2^{(n)}$  が有限群だから,  $M_n$  は  $\text{II}_\infty$  型である. よって Step 2 から,  $M$  に対する定理は  $\text{II}_\infty$  型の場合に帰着し, さらに Step 4 から semifinite factor の場合 (Step 7) に帰着する.

Step 6  $M$  が separable predual の  $\text{III}_\lambda$  型 factor ( $0 < \lambda < 1$ ) のとき,  $\sigma_{t_0}^\omega = \text{id}$  (ただし  $t_0 = -2\pi/\log \lambda$ ) となる忠実な正規 semifinite weight  $\omega$  が取れて, 接合積  $N_0 = M \rtimes_{\sigma_\omega} (\mathbb{R}/t_0\mathbb{Z})$  は  $\mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{R}/t_0\mathbb{Z})$  上の  $\text{II}_\infty$  型 factor になる. このとき,  $\sigma^\omega$  の dual action  $(\theta_0^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  (ここには  $(\mathbb{R}/t_0\mathbb{Z})^\wedge = \mathbb{Z}$  とみなす) と  $N_0$  上の正規トレース  $\tau_0$  について,  $\tau_0 \circ \theta_0 = \lambda \tau_0$  が成立している.  $\varphi \in M_*^+$  に対して,  $N = M \rtimes_{\sigma_\omega} \mathbb{R}$  上の dual weight  $\tilde{\varphi}$  と別に,  $N_0$  上の dual weight  $\bar{\varphi}$  が定まる (i.e.  $N_0$  から  $M$  への operator valued weight  $T_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_0^n(\cdot)$  により  $\bar{\varphi} = \varphi \circ T_0$ ).

いま

$$f_{\varphi}(s) = \tau_0(\chi_{(s, \infty)}(\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0})), \quad s > 0,$$

とおくと, 次が計算できる:

$$(1) \quad f_{\varphi}(s) = \lambda f_{\varphi}(\lambda s) \quad (s > 0),$$

$$(2) \quad \varphi(1) = \int_{\lambda}^1 f_{\varphi}(s) ds,$$

$$(3) \quad \varphi \sim \psi \iff f_{\varphi} = f_{\psi},$$

$$(4) \quad d([\varphi], [\psi]) = \int_{\lambda}^1 |f_{\varphi}(s) - f_{\psi}(s)| ds,$$

$$(5) \quad \{f_{\varphi} : [\varphi] \in \mathcal{M}_{*}^{+}/\sim\} = \{f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \mid \text{非増加, 右連続, } f(s) = \lambda f(\lambda s) (s > 0)\}.$$

そこで  $f_{\varphi}$  が  $\hat{\varphi}$  と等価であることをチェックすればよい. ユニタリー

$$\nabla : \mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{R}/t_0\mathbb{Z}) \otimes L^2(0, \gamma_0) \longrightarrow \mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{R})$$

(ただし  $\gamma_0 = -\log \lambda$ ) を適当に定めると,  $\nabla^* \cdot \nabla$  による同一視で

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \otimes L^{\infty}(0, \gamma_0) = \int_{[0, \gamma_0)}^{\oplus} \mathcal{N}_0 d\gamma.$$

このとき,

$$\tau = \int_{[0, \gamma_0)}^{\oplus} e^{-\gamma} \tau_0 d\gamma, \quad \text{i.e.} \quad \tau = \tau_0 \otimes e^{-\gamma} d\gamma.$$

$\gamma \in \mathcal{N}_0 \otimes L^{\infty}(0, \gamma_0) (= L^{\infty}([0, \gamma_0), \mathcal{N}_0))$  と  $s = r + n\gamma_0$  ( $r \in [0, \gamma_0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ) に対し  $\tau$ ,

$$(\theta_0(y))(\gamma) = \begin{cases} \theta_0^{n+1}(y(\gamma-r+\gamma_0)), & 0 \leq \gamma < r, \\ \theta_0^n(y(\gamma-r)), & r < \gamma < \gamma_0. \end{cases}$$

これより,  $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$  に対し  $\tilde{\varphi} = \bar{\varphi} \otimes d\gamma$  がわかり,

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau} = \frac{d(\bar{\varphi} \otimes d\gamma)}{d(\tau_0 \otimes e^{-\gamma} d\gamma)} = \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0} \otimes m(e^\gamma)$$

(ただし  $m(e^\gamma)$  は  $e^\gamma$  の掛算作用素). よって

$$e_\varphi = \int_{[0, \gamma_0)}^{\oplus} \chi_{(1, \infty)}(e^\gamma \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0}) d\gamma = \int_{[0, \gamma_0)}^{\oplus} \chi_{(e^{-\gamma}, \infty)}(\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0}) d\gamma$$

となり,  $z \in Z(\mathcal{N}) = L^\infty(0, \gamma_0)$  に対して

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(z) &= \tau(e_\varphi z) = \int_0^{\gamma_0} \tau_0(\chi_{(e^{-\gamma}, \infty)}(\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0}) z(\gamma)) e^{-\gamma} d\gamma \\ &= \int_\lambda^1 f_\varphi(s) z(-\log s) ds. \end{aligned}$$

従って,  $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_*^+$  のとき

$$\|\hat{\varphi} - \hat{\psi}\| = \int_\lambda^1 |f_\varphi(s) - f_\psi(s)| ds = d([\varphi], [\psi]) \quad (\text{by (4)})$$

より, 定理の (i) が成立. 定理の (ii) は (5) からわかる.

Step 7  $\mathcal{M}$  が separable predual の semifinite factor のとき,  
 $\mathcal{M}$  上の正規トレース  $\tau_0$  を

$$J_{\text{def}} \{ \tau_0(p) : p \in \mathcal{M} \text{ 射影} \} = \begin{cases} \{0, 1, 2, \dots\} & (\mathcal{M} \text{ が I 型}) \\ [0, 1] & (\mathcal{M} \text{ が II}_1 \text{ 型}) \\ [0, \infty) & (\mathcal{M} \text{ が II}_\infty \text{ 型}) \end{cases}$$

のように取って,  $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$  に対して

$$f_\varphi(\lambda) = \tau_0(\chi_{(\lambda, \infty)}(\frac{d\varphi}{d\tau_0})), \quad \lambda > 0,$$

とおくと, 次の計算できる:

$$(1) \quad \varphi(1) = \int_0^\infty f_\varphi(\lambda) d\lambda,$$

$$(2) \quad \varphi \sim \psi \iff f_\varphi = f_\psi,$$

$$(3) \quad d([\varphi], [\psi]) = \int_0^\infty |f_\varphi(\lambda) - f_\psi(\lambda)| d\lambda,$$

$$(4) \quad \{f_\varphi : [\varphi] \in \mathcal{M}_*^+ / \sim\} = \{f : [0, \infty) \rightarrow J \mid \text{非増加, 右連続 } L^1\text{-関数}\}.$$

$\sigma_t^{\tau_0} = \text{id}$  より  $\mathcal{N} \cong \mathcal{M} \otimes L^\infty(\mathbb{R})$  なので,

$$\mathcal{N} = \mathcal{M} \otimes L^\infty(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}}^\oplus \mathcal{M} d\gamma$$

と同一視すると,  $\tau = \int_{\mathbb{R}}^\oplus e^{-\gamma} \tau_0 d\gamma$ ,  $(\theta_s(y))(\gamma) = y(\gamma - s)$  ( $\gamma \in \mathbb{R}$ ).

よって  $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$  に対して,  $\tilde{\varphi} = \varphi \otimes d\gamma$  となり  $\frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau_0} \otimes m(e^\gamma)$ ,

$$e_\varphi = \int_{\mathbb{R}}^\oplus \chi_{(e^{-\gamma}, \infty)}(\frac{d\varphi}{d\tau_0}) d\gamma. \quad z \in Z(\mathcal{N}) = L^\infty(\mathbb{R}) \text{ に対して}$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(z) &= \tau(e_\varphi z) = \int_{-\infty}^\infty \tau_0(\chi_{(e^{-\gamma}, \infty)}(\frac{d\varphi}{d\tau_0}) z(\gamma)) e^{-\gamma} d\gamma \\ &= \int_0^\infty f_\varphi(\lambda) z(-\log \lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

従って (3) より 定理の (i) が成立.  $M$  が  $\text{II}_\infty$  型 のとき, 定理の (ii) は (4) からわかる.  $M$  が  $\text{II}_1$  型 のとき, 定理の (iii) は  $J=[0,1]$  に注意すると同じく (4) からわかる.

最後に, 説明を省略した Step 6 の (1)-(5) と Step 7 の (1)-(4) が最も具体的な計算部分であることを注意しておく.

#### §4. 定理の応用

定理の直接的な応用として,  $\mathcal{S}(M)/\sim$  に関する以下の結果が [5] で与えてある.

(1°)  $M$  が properly infinite で I 型 direct summand を持たないとき,  $[\varphi] \mapsto \hat{\varphi}$  は  $\mathcal{S}(M)/\sim$  から

$$P_1(M) = \{ \chi \in \mathcal{S}(Z(N)) : \chi \cdot \theta_s \geq e^{-s} \chi \ (s > 0) \}$$

への onto isometry. また  $P_1(M)$  は Choquet simplex.

これの前半は定理の (ii) であり, 後半は容易にわかる.

(2°)  $M$  が  $\text{III}_\lambda$  型 factor ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) のとき,

$$\text{diam}(\mathcal{S}(M)/\sim) = 2 \frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}.$$

これは §1 の (4°) で述べた結果であるが, [3] の証明は分り易くない. 上の (1°) を使って計算すると, より初等的な別証が得られる. ただし  $\lambda=1$  の場合は, 定理の証明で  $\mathcal{S}(M)$



の homogeneity を使っているから、別証にはなっていない。尚  
[5] では  $M$  が separable predual を仮定しているが、この  
仮定は不要であろう。

(3°)  $M$  が  $\text{III}_\lambda$  型 factor ( $0 < \lambda < 1$ ) のとき,  $P_1(M)$  はコン  
パクトな Bauer simplex (i.e.  $\text{ex} P_1(M)$  がコンパクト) であり,  
従って  $\mathcal{S}(M)/\sim$  はコンパクト。

(4°)  $M$  が  $\text{III}_0$  型 factor のとき,  $\text{ex} P_1(M) = \emptyset$  であり, 従っ  
て  $P_1(M)$  および  $\mathcal{S}(M)/\sim$  はコンパクトでない。

ついでに,  $M$  が  $\text{I}_n$  型を除く semifinite factor のときも,  
 $\mathcal{S}(M)/\sim$  がコンパクトでないことに注意しておく。

[5] では他にも定理の応用として, centralizer が  $\text{II}_1$  型の  
忠実正規 state の存在に関する結果と, approximate pointwise  
inner 自己同型 (i.e.  $\varphi \circ \alpha^{-1} \sim \varphi$  ( $\varphi \in M_*^+$ ) となる  $\alpha \in \text{Aut}(M)$ )  
に関する興味ある結果が与えてある。

## §5. 関連結果

筆者と中村氏が [6, 7] で得た結果は Haagerup-Størmer の  
主定理に密接に関連している。この節でそれらを報告しよう。  
まず  $M$  は忠実な正規トレース  $\tau$  をもつ semifinite v. N. 代数と  
する。  $(M, \tau)$  上の  $L^p$ -空間は

$$L^p(M) = \{x \in \tilde{M} : \|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p} < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$L^\infty(M) = M, \quad \|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|.$$

また

$$\tilde{\mathcal{G}} = \{x \in \tilde{M} : \tau(\chi_{(s, \infty)}(|x|)) < \infty \ (s > 0)\}$$

とすると,  $\tilde{\mathcal{G}} \supset L^p(M) \ (1 \leq p < \infty)$ .  $x \in \tilde{M}$  の generalized  $s$ -numbers  $\mu_t(x)$ ,  $t > 0$ , は

$$\mu_t(x) = \inf \{s \geq 0 : \tau(\chi_{(s, \infty)}(|x|)) \leq t\}.$$

$\tau(1) < \infty$  のとき,  $x \in \tilde{M}_{sa}$  (selfadjoint な  $\tilde{M}$  の元) の spectral scale  $\lambda_t(x)$ ,  $0 < t < \tau(1)$ , は

$$\lambda_t(x) = \inf \{s \in \mathbb{R} : \tau(\chi_{(s, \infty)}(x)) \leq t\}.$$

このとき, majorization の手法を使って次が得られる.

(1°)  $M$  が finite factor のとき,  $x, y \in \tilde{M}_{sa}$  に対して

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - uy u^*\|_p = \left\{ \int_0^{\tau(1)} |\lambda_t(x) - \lambda_t(y)|^p dt \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

ただし  $p = \infty$  では 右辺 =  $\sup_{0 < t < \tau(1)} |\lambda_t(x) - \lambda_t(y)|$ .

(2°)  $M$  が infinite な semifinite factor のとき,  $x, y \in \tilde{\mathcal{G}}_{sa}$  に対して

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - uy u^*\|_p = \left\{ \int_0^\infty |\mu_t(x_+) - \mu_t(y_+)|^p dt + \int_0^\infty |\mu_t(x_-) - \mu_t(y_-)|^p dt \right\}^{1/p},$$

$$1 \leq p \leq \infty.$$

ただし  $p = \infty$  では 右辺  $= \max \left\{ \sup_{t > 0} |\mu_t(x_+) - \mu_t(y_+)|, \sup_{t > 0} |\mu_t(x_-) - \mu_t(y_-)| \right\}$ .

また  $x = x_+ - x_-$  は  $x$  の Jordan 分解.

いま  $\varphi, \psi \in M_*^+$  のとき,  $x = \frac{d\varphi}{d\tau}$ ,  $y = \frac{d\psi}{d\tau} \in L^1(M)_+$  となり,  
(1°), (2°) から

$$d([\varphi], [\psi]) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - u y u^*\|_1 = \int_0^\infty |\mu_t(x) - \mu_t(y)| dt.$$

$\mu_t(x)$  は  $f_\varphi(s) = \tau(\chi_{(s, \infty)}(x))$  の "inverse" 関数であり,

$$\int_0^\infty |\mu_t(x) - \mu_t(y)| dt = \int_0^\infty |f_\varphi(s) - f_\psi(s)| ds$$

に注意すると, 上の (1°), (2°) は  $M$  が semifinite factor の場合  
で  $M_*^+ = L^1(M)_+$  に対する定理の (i) を  $L^p(M)_{sa}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , に拡張  
していることがわかる.

次に  $M$  が III 型の場合を考えよう.

(3°)  $M$  が  $\sigma$ -finite な III 型 factor のとき, 正規な  $x, y \in M$   
に対して

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - u y u^*\| = h(\sigma(x), \sigma(y)).$$

ここに 右辺は  $x, y$  のスペクトル  $\sigma(x), \sigma(y)$  の間の Hausdorff  
距離.

さて, §2 の  $\mathcal{N}$  と  $\theta_\phi$  を用いて, Haagerup  $L^p$ -空間は

$$L^p(M) = \{x \in \tilde{\mathcal{N}} : \theta_\lambda(x) = e^{-\lambda/p} x \quad (\lambda \in \mathbb{R})\}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

特に  $M$  が  $\text{III}_\lambda$  型 factor ( $0 < \lambda < 1$ ) の場合, §3 の Step 6 の  $\mathcal{N}_0$  と  $\theta_0$  を用いて, "discrete" Haagerup  $L^p$ -空間は

$$L_o^p(M) = \{x \in \tilde{\mathcal{N}}_0 : \theta_0(x) = \lambda^{1/p} x\}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

(4°)  $M$  が  $\text{III}_1$  型 factor のとき,  $x, y \in L^p(M)_{sa}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , に対して

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - u y u^*\|_p = \left\{ |\|x_+\|_p - \|y_+\|_p|^p + |\|x_-\|_p - \|y_-\|_p|^p \right\}^{1/p}.$$

これの左辺  $\geq$  右辺は  $x \in L^p(M)$  の  $\tilde{\mathcal{N}}$  での generalized  $s$ -numbers が  $\mu_t(x) = t^{1/p} \|x\|_p$  であることから majorization の手法で証明される. 左辺  $\leq$  右辺は  $\mathcal{S}(M)$  の homogeneity と generalized Powers-Størmer 不等式 (by Kosaki) を使って証明される.

(5°)  $M$  が  $\text{III}_\lambda$  型 factor ( $0 < \lambda < 1$ ) のとき,  $x, y \in L_o^p(M)_{sa}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , に対して

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - u y u^*\|_p = \left\{ \int_\lambda^1 |\mu_t(x_+) - \mu_t(y_+)|^p dt + \int_\lambda^1 |\mu_t(x_-) - \mu_t(y_-)|^p dt \right\}^{1/p}.$$

こゝに  $\mu_t(x)$  は  $x$  の  $\tilde{\mathcal{N}}_0$  での generalized  $s$ -numbers.

これも  $\mu_t(x) = \lambda^{1/p} \mu_{\lambda t}(x)$  であることから majorization の手法

で証明される.

いま  $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_*^+$  のとき,  $x = \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0}$ ,  $y = \frac{d\bar{\psi}}{d\tau_0} \in L^1_0(\mathcal{M})_+$  となり  
(cf. §3 の Step 6),

$$d([\varphi], [\psi]) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - uy u^*\|_1 = \int_{\lambda}^1 |\mu_t(x) - \mu_t(y)| dt.$$

$\mu_t(x)$  は  $f_{\varphi}(s) = \tau_0(\chi_{(s, \infty)}(x))$  の "inverse" 関数であり,

$$\int_{\lambda}^1 |\mu_t(x) - \mu_t(y)| dt = \int_{\lambda}^1 |f_{\varphi}(s) - f_{\psi}(s)| ds$$

に注意すると, (5°) は  $\mathcal{M}$  が  $\text{III}_{\lambda}$  型 factor ( $0 < \lambda < 1$ ) の場合で  
 $\mathcal{M}_*^+ = L^1_0(\mathcal{M})_+$  に対する定理の (i) を  $L^p_0(\mathcal{M})_{sa}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , に拡張  
していることがわかる.

次は (5°) の系である.

(6°)  $\mathcal{M}$  が  $\text{III}_{\lambda}$  型 factor ( $0 < \lambda < 1$ ) のとき,

$$\text{diam}(L^p(\mathcal{M})_{+,1}/\sim) = 2^{1/p} \frac{1 - \lambda^{1/2p}}{(1 + \lambda^{1/2})^{1/p}}, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

こゝに  $L^p(\mathcal{M})_{+,1}/\sim$  は  $L^p(\mathcal{M})_{+,1} = \{x \in L^p(\mathcal{M})_+ : \|x\|_p = 1\}$  の  
閉ユニタリ軌道の空間 (特に  $L^1(\mathcal{M})_{+,1}/\sim = \mathcal{S}(\mathcal{M})/\sim$ ).

## §6. 問題と予想

Haagerup-Størmer の主定理が  $\mathcal{M}_*^+ = L^1(\mathcal{M})_+$  における結果である  
のに対し, §5 のそれぞれの結果は  $L^p(\mathcal{M})_{sa}$  におけるもので

あるから強い。他方, Haagerup-Størmer のが unified theorem であるのに対し, われわれのはタイプごとの結果であり, しかも  $\text{III}_0$  型が抜けているのが弱い。  $L^p(M)_{sa}$  における unified theorem が出来れば申し分ないが, 当面の問題として以下のものが考えられる。

(問題1)  $M$  が  $\text{III}_0$  型 factor の場合,  $x, y \in L^p(M)_{sa}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , に対して  $\inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - uy u^*\|_p$  を exact に評価すること。われわれの majorization の方法では,  $\mu_t(x)$  が  $\|x\|_p$  だけで決まるので exact な評価は望めない。対応  $[\varphi] \in M_*^+ / \sim \mapsto \hat{\varphi} \in Z(N)_*^+$  を  $L^p(M)_+ / \sim$  の元にまで modify して §3 の マルチンゲールの定理の方法を使うことが考えられるが, それだけでは無理なように思われる。

(問題2)  $M$  が  $\text{III}_0$  型 factor の場合, 問題1を矮小化した問題として 予想  $\text{diam}(L^p(M)_{+,1} / \sim) = 2^{1/p}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , がある。

(問題3) §5 の (2°), (4°), (5°) を考慮すると,  $M$  が properly infinite のとき,  $x, y \in L^p(M)_{sa}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , に対して

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - uy u^*\|_p = \left\{ \inf_{u \in \mathcal{U}} \|x_+ - uy_+ u^*\|_p^p + \inf_{u \in \mathcal{U}} \|x_- - uy_- u^*\|_p^p \right\}^{1/p}$$

が予想される。  $M$  が separable predual とすると,  $L^p(M)$  に対する reduction theory が使えるから,  $M$  が infinite factor のと

きに証明すれば十分であろう。従って  $M$  が  $\text{III}_0$  型 factor の場合が問題となる。特に  $p=1$  の場合, この問題は *selfadjoint* な  $\varphi, \psi \in M_*$  に対して

$$\begin{aligned} d([\varphi], [\psi]) &= d([\varphi_+], [\psi_+]) + d([\varphi_-], [\psi_-]) \\ &= \|\hat{\varphi}_+ - \hat{\psi}_+\| + \|\hat{\varphi}_- - \hat{\psi}_-\| \end{aligned}$$

と同じである。これが証明できれば, 問題 1 で  $p=1$  の場合が一応解決することになる。  $M$  が *finite* な場合, 上の等式が成立しないことに注意しておく。

## 文 献

- [1] J. Bion-Nadal, Espace des états normaux d'un facteur de type  $\text{III}_\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ , et d'un facteur de type  $\text{III}_0$ , *Canad. J. Math.*, 36 (1984), 830-882.
- [2] A. Connes, Une classification des facteurs de type III, *Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 4*, 6 (1973), 133-252.
- [3] A. Connes, U. Haagerup and E. Størmer, Diameters of state spaces of type III factors, *Lecture Notes in Math.* 1132, Springer, 1985, pp. 91-116.
- [4] A. Connes and E. Størmer, Homogeneity of the state space of factors of type  $\text{III}_1$ , *J. Funct. Anal.*, 28 (1978), 187-196.
- [5] U. Haagerup and E. Størmer, Equivalence of normal states on von Neumann algebras and the flow of weights, Preprint.
- [6] F. Hiai and Y. Nakamura, Distance between unitary orbits in von Neumann algebras, *Pacific J. Math.*, to appear.
- [7] Y. Nakamura,  $L^p$ -distance between unitary orbits in type III factors, Preprint.